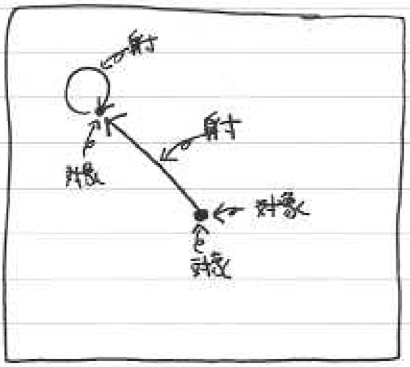
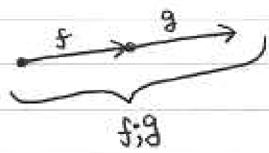
圏 $\mathbb{C}$



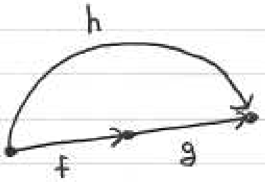


もしくは
g∘f とかく

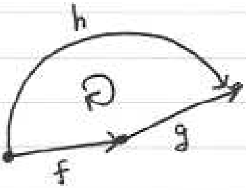
こういう図を図式という。

f;gは図式的、g・fは関数的

圏は対象と射からできてる。

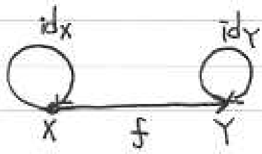


f;g は必ずしもhではない。

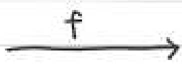


f;g = h なら可換という。

↻ 記号をかく。



||

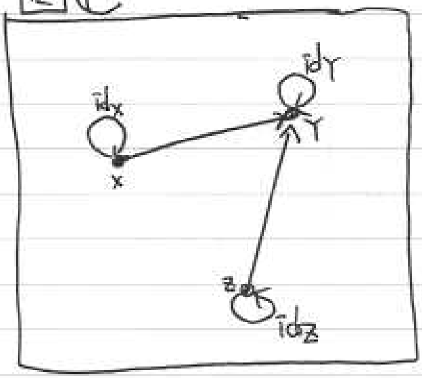


id_X… 恒等射

$f;id_Y = f$

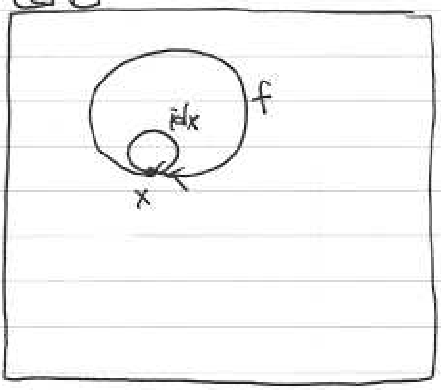
$id_X;f = f$

圏 $\mathbb{C}$



どの対象にも必ず
恒等射はある.
しかしめんどうなので
省略される

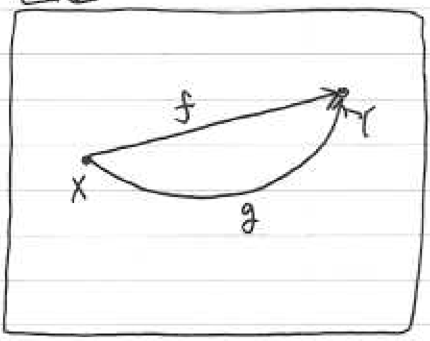
圏 $\mathbb{C}$



この圏の射は

id_X, f, $f;f$, $f;f;f$, $f;f;f;f$, ……

圏 $\mathbb{C}$

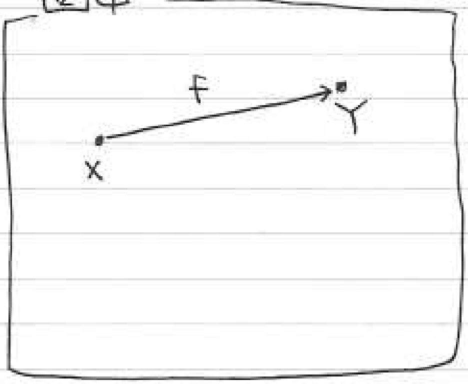


X, Yの間の射全体を　　集合になってる

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, Y) = \{f, g\}$

とかいたりする。$\mathbb{C}(X, Y)$ ともかく。

圏 $\mathbb{C}$

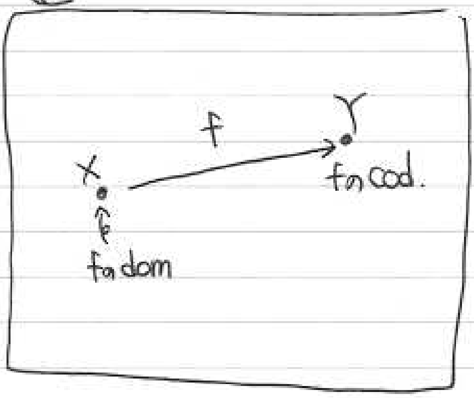


fは

$f: X \longrightarrow Y$ とか

$X \xrightarrow{f} Y$ とかかいたりする。

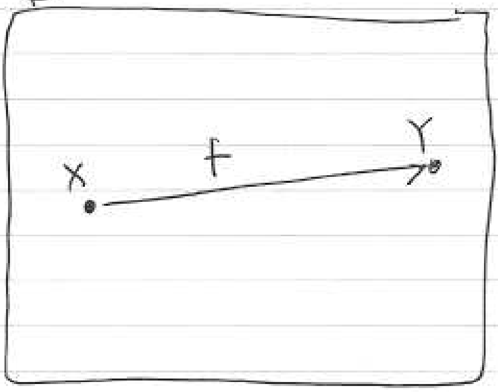
$\mathbb{C}$



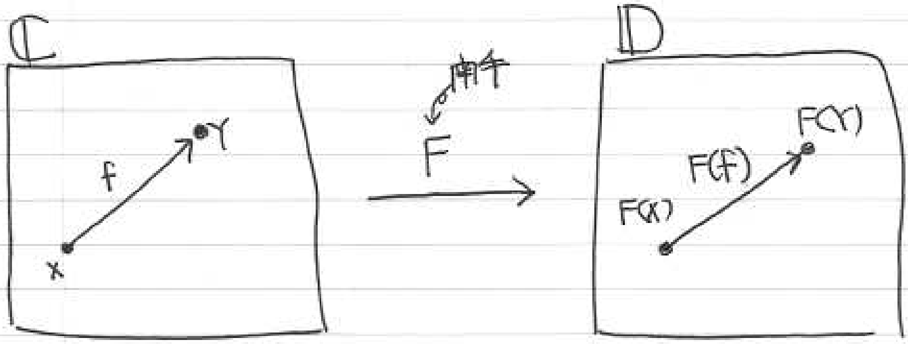
fのdom. はX

fのcod はY. といったりする。

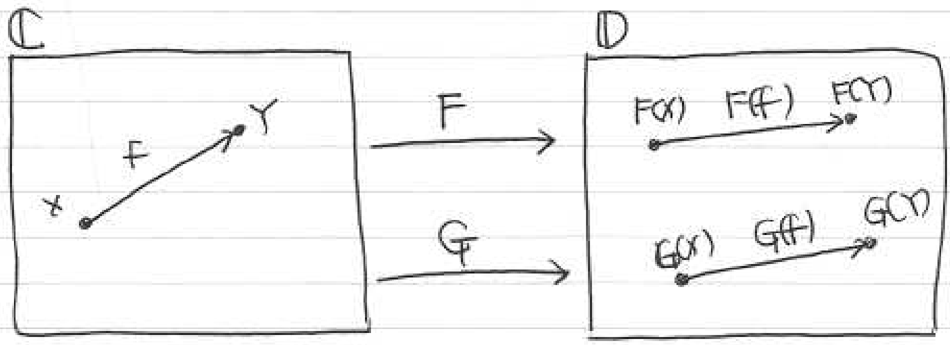
$\mathbb{C}$



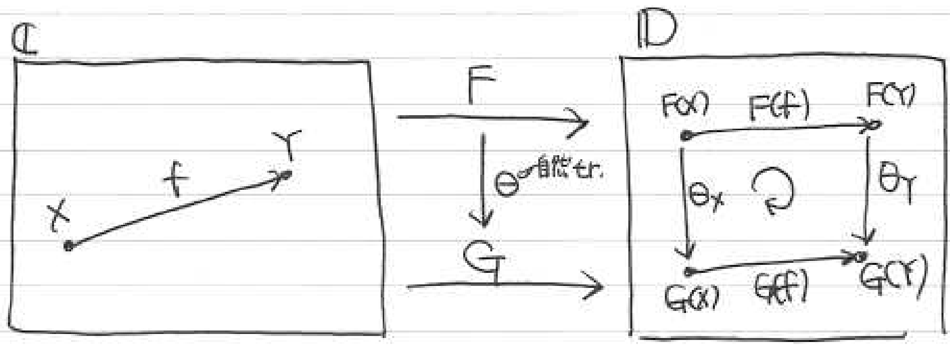
$f(X) = Y$ とかいたりする。



$F: \mathbb{C} \to \mathbb{D}$



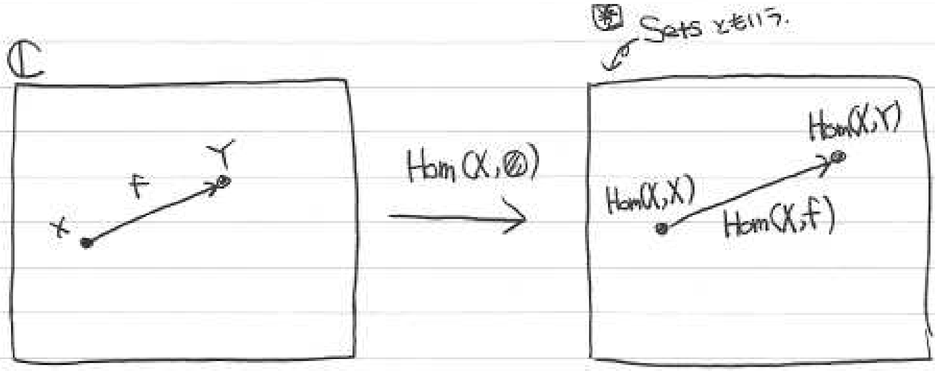
F(X)=G(X)の可能性もある。



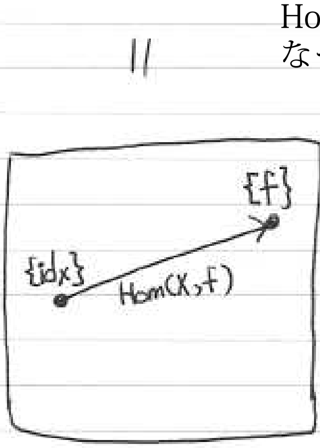
このような可換図式を満たすθを自然変換という。

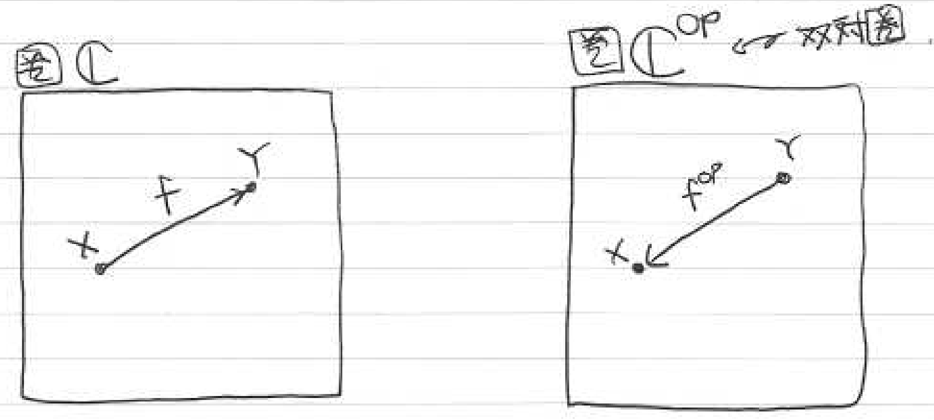
$\theta: F \xrightarrow{\cdot} G$

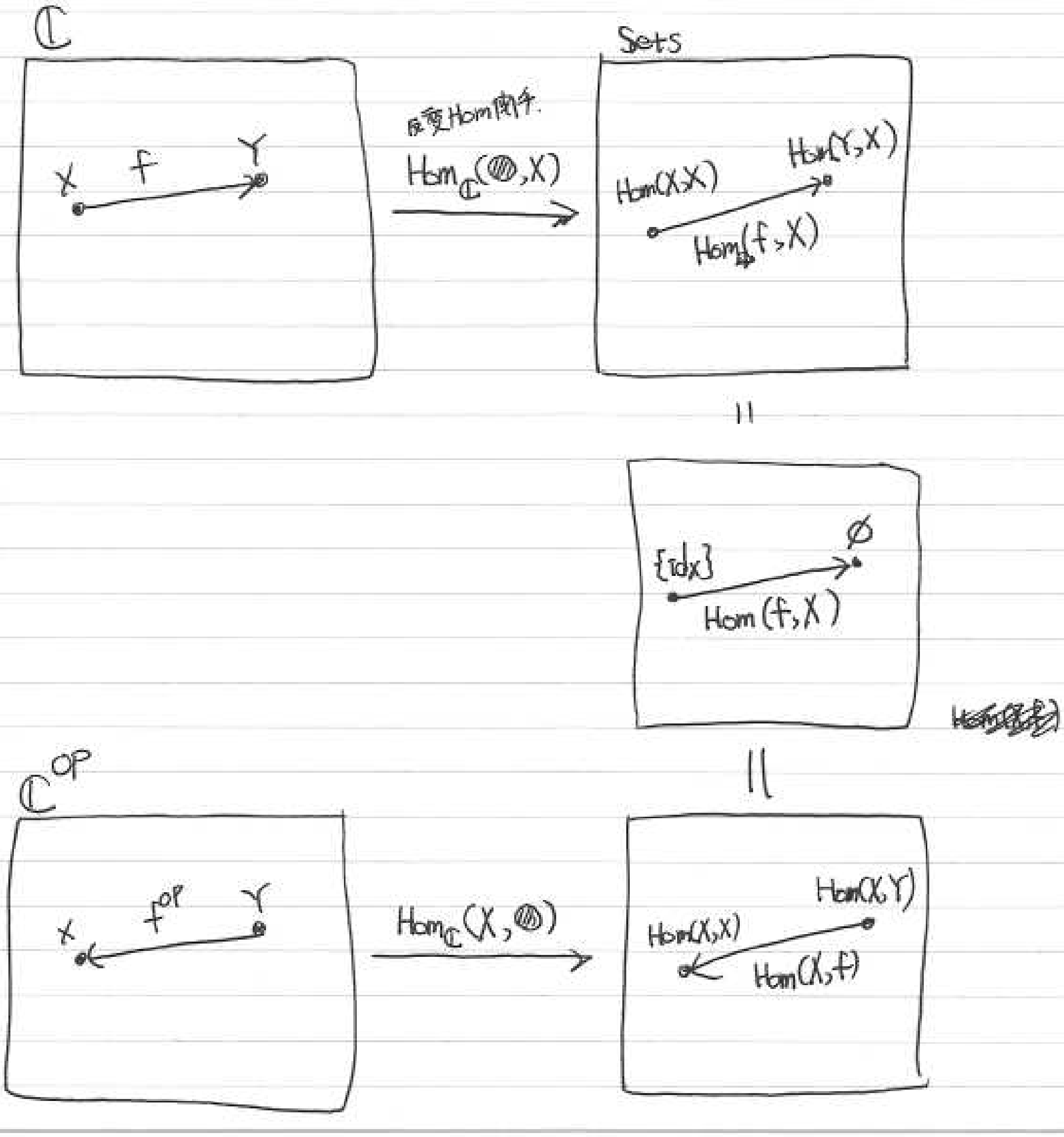
関手の例. 共変Hom関手. $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, ▨)$ ~ $h_X(▨)$ とも書く

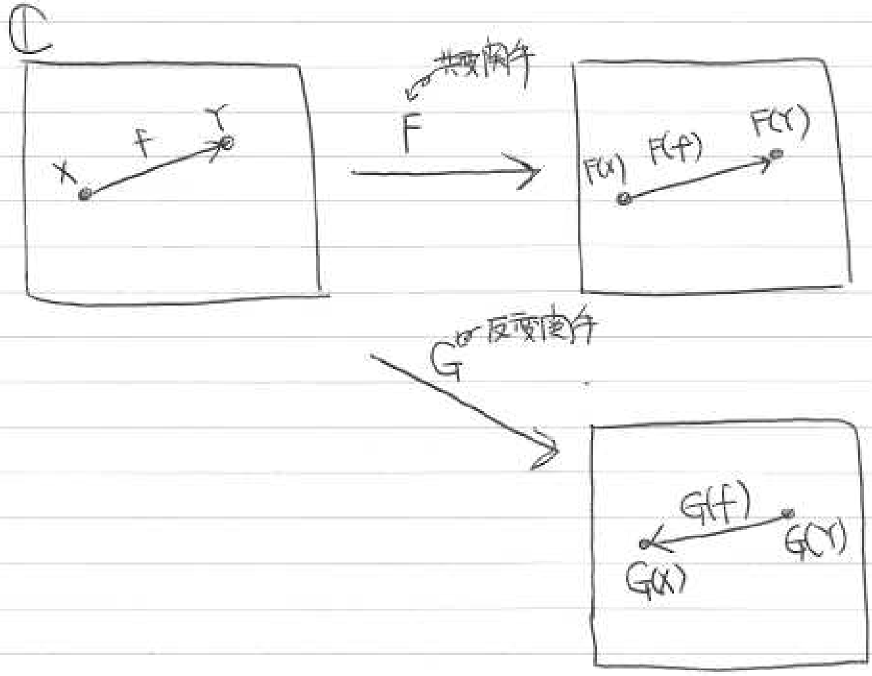


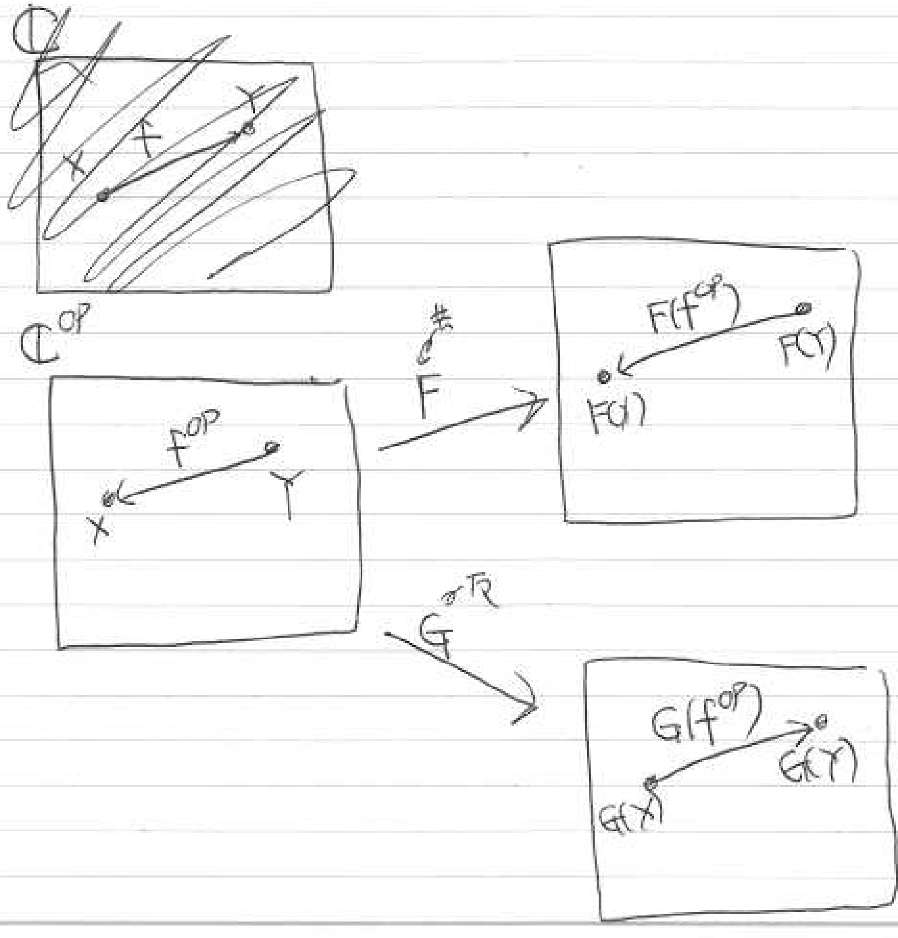
Homが対象に
なっている。




圏 ℂ
X
f
Y
圏 ℂ^op ↔ 双対圏
f^op

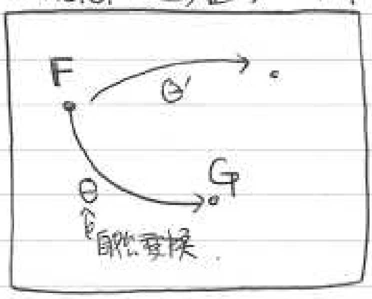

ℂ
X
f
Y
反変Hom関手
Hom_ℂ(◍, X)
Sets
Hom(X, X)
Hom(Y, X)
Hom(f, X)
{id_X}
∅
Hom(f, X)
ℂ^op
X
f^op
Y
Hom_ℂ(X, ◍)
Hom(X, Y)
Hom(X, X)
Hom(X, f)


ℂ
X
f
Y
共変関手
F
F(X)
F(f)
F(Y)
G
反変関手
G(f)
G(Y)
G(X)


ℂ^op
f^op
X
Y
共
F
F(f^op)
F(Y)
F(X)
G
反
G(f^op)
G(X)
G(Y)

関手. $F, G, \cdots\cdots : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{D}$

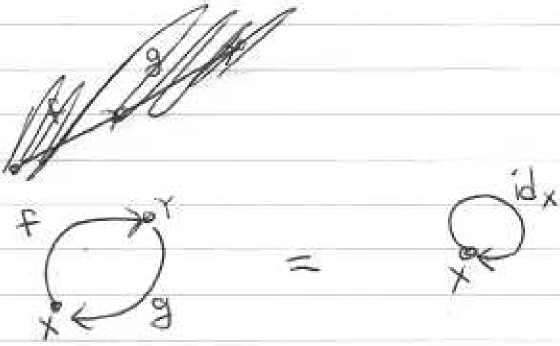
$\mathrm{Functor}(\mathbb{C}, \mathbb{D})$ … 関手の圏 〜〜 $\mathbb{D}^{\mathbb{C}}$ とも書く.



関手が対象で自然変換が射になっている。

$\in \mathrm{Nat}(F, G) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}^{\mathbb{C}}}(F, G)$

同型射

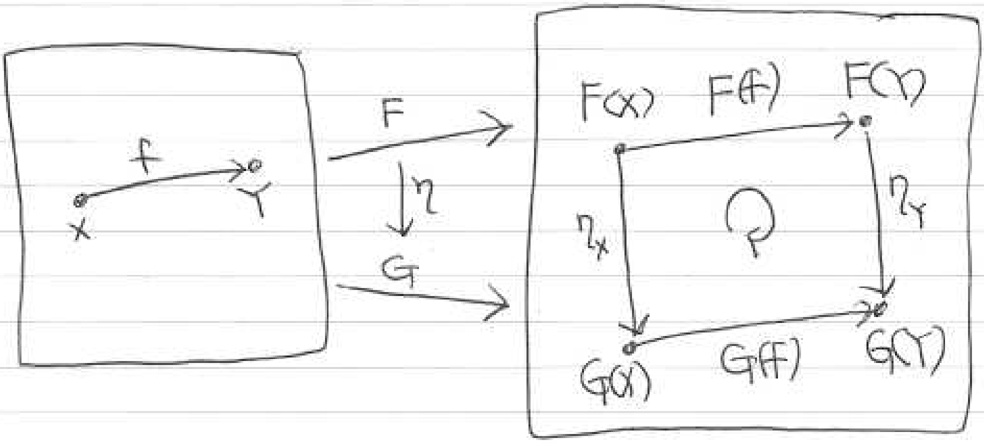


となる f
(gはfの逆射)

(2つの関手が)
自然同型.

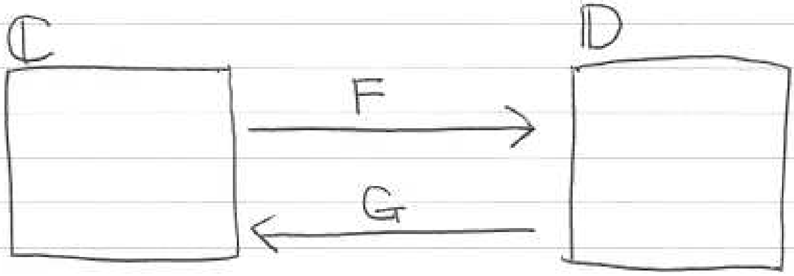
関手 $F, G : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$

自然変換 $\eta : F \to G$

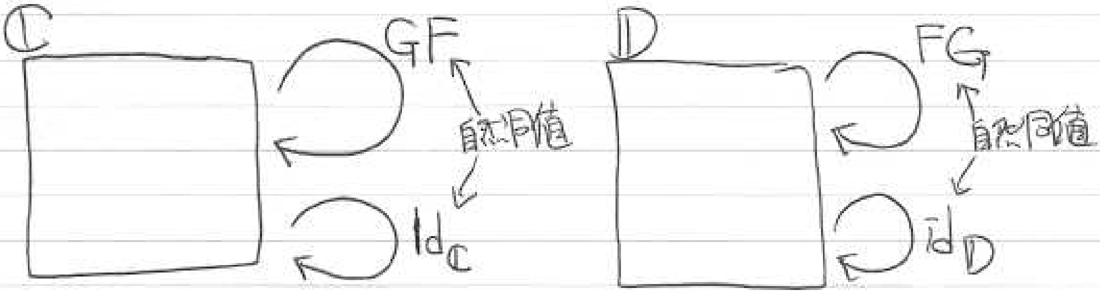


η_X とか η_Y とかが
同型射.

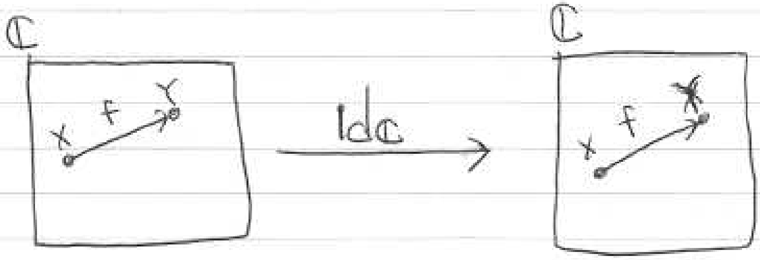
圏同値（圏$\mathbb{C}$と$\mathbb{D}$が）



があるとして

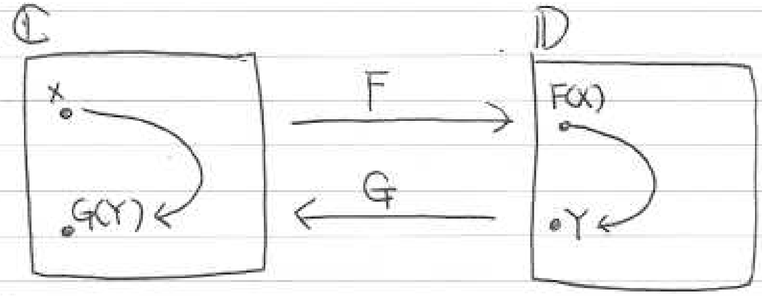


恒等関手



なにもしない

随伴関手 (F,Gが)



$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(X, G(Y)) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{D}}(F(X), Y)$$

モノ射 (fが)
(単射)

$$\begin{array}{ccc} \bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \xrightarrow{f} \bullet & & \bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \\ \| & \Longrightarrow & \| \\ \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \xrightarrow{f} \bullet & & \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \end{array}$$

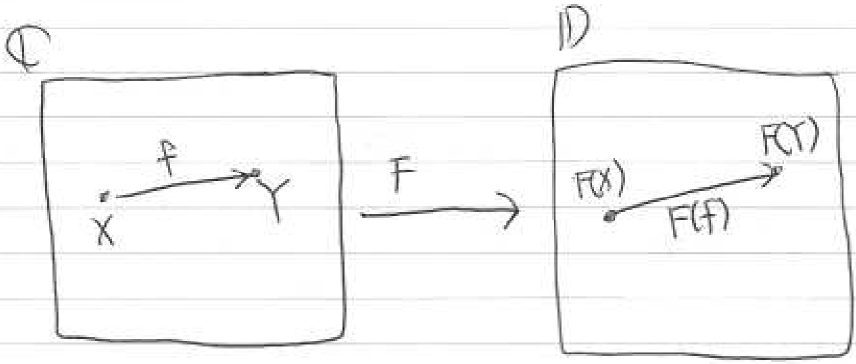
エピ射 (fが)
(全射)

$$\begin{array}{ccc} \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g_1} & & \bullet \xrightarrow{g_1} \bullet \\ \| & \Longrightarrow & \| \\ \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g_2} & & \bullet \xrightarrow{g_2} \bullet \end{array}$$

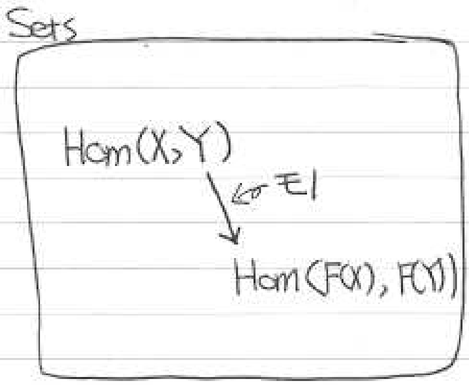
全単射 (逆同型射ではない)

モノかつエピ

忠実関手

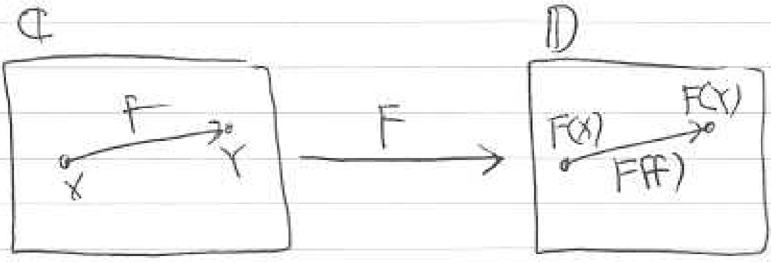


C
D
f
X
Y
F
F(X)
F(Y)
F(f)

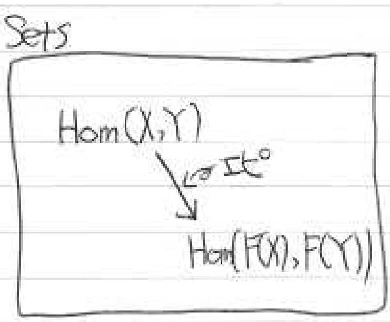


Sets
Hom(X,Y)
モノ
Hom(F(X), F(Y))

充満

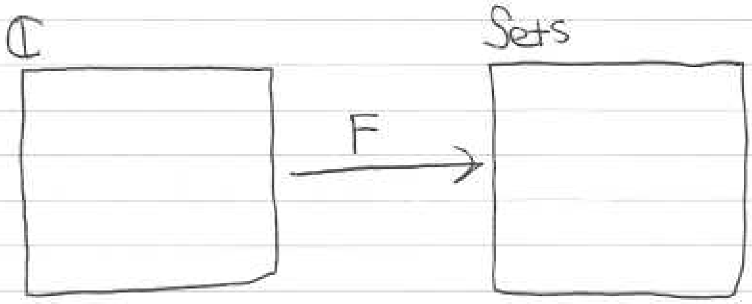


C
D
f
X
Y
F
F(X)
F(Y)
F(f)

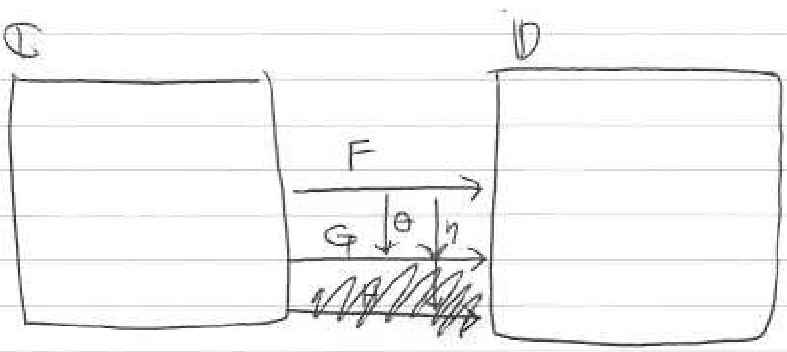


Sets
Hom(X,Y)
エピ
Hom(F(X), F(Y))

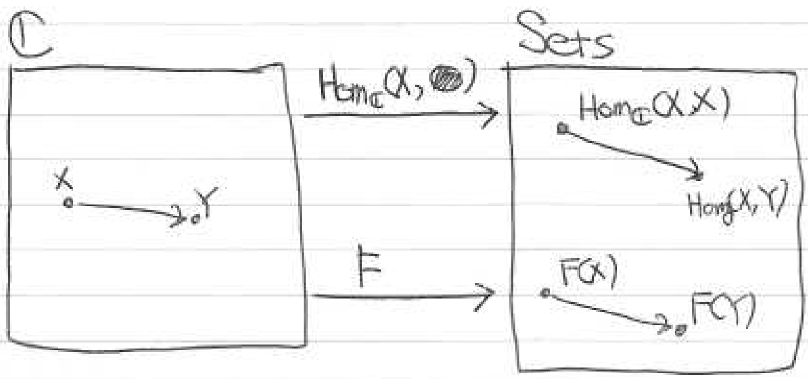
表現可能関手.



Setsへの関手



$$\theta, \eta, \cdots \in \mathrm{Nat}(F, G)$$



米田の補題

全単射.

$$\mathrm{Nat}(\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(A, \bullet), F) \longrightarrow F(A)$$